

宇宙射線-磁流動力學系統之模擬

桑原匠史 羅英奕 高仲明
國立中央大學天文研究所

摘要

利用二維磁流動力學的數值模擬，研究在由電漿氣體、磁場所組成之系統中加入宇宙射線所誘導的不穩定。線性分析由熱電漿、宇宙射線及艾爾文波(Alfvén waves)構成的宇宙射線-電漿系統，顯示系統對由宇宙射線驅動的磁聲(magnetoacoustic)不穩定性非常敏感。然而長期的非線性不穩定發展，卻鮮少有這方面的研究。有鑑於此，我們發展了二維磁流動力學(magnetohydrodynamics MHD)的數值模擬，試圖研究這個問題。並呈現初步的結果。

關鍵字：星際介質(Interstellar Medium,ISM)、宇宙射線(Cosmic-ray,CR)、磁流動力學(Magnetohydrodynamics,MHD)、數值模擬(Numerical Simulation)

1. 介紹

在星際介質中，宇宙射線的能量密度和磁場、熱能及紊流的動能的能量密度為同一等級，故宇宙射線藉由星際介質中之磁場與電漿的耦合，對星際介質的結構上和動態演化上扮演了一定的角色。(Parker1969)最初對磁浮造成的的不穩定之研究也有考慮宇宙射線的效應，(Hanasz and Lesch 2000)完成了在通量管近似條件下，由超新星爆炸所引發宇宙射線的 Parker 不穩定的計算。此外，研究宇宙射線調制震波 (cosmic-ray-modified shocks)(Drury and Völk 1981)；(Axford et al. 1991)；(McKenzie and Völk 1991)；(Webb 1983)；(Ko et al. 1997)可讓我們估計震波對宇宙射線加速的效率。在超新星遺骸中之震

波會加速宇宙射線，造成震波的改變，進而導致整個超新星遺骸演化的改變(Drury et al. 1989)；(Jones and Kang 1992)。由星系宇宙射線或異常成分對太陽風終端震波的調整直接影響宇宙射線的調制(Ko et al. 1988)；(Lee and Axford 1988)；(Ko 1991a)。將宇宙射線視為極端高溫的氣體可支撐星系暈，或驅動星系風(Hartquist 1986)；(Ko et al. 1991)；(Ko 1991b)；(Ipavich 1975)；(Zank 1989)；(Breitschwerdt et al. 1991)；(Breitschwerdt et al. 1993)。以上所述的現象說明了宇宙射線如何在決定星際介質和星系的結構上佔有重要的份量。在討論了以上許多有關宇宙射線對星際物質的影響後，我們希望利用數值方法來模擬這些現象。於是我們擴展了磁流動力

學(MHD)的程式，而將宇宙射線的部分加入原先的程式。上述的系統都在二流體(two fluids)模型底下進行，所謂的二流體模型，就是指熱電漿和宇宙射線的模型，而磁場內嵌於其中。此外，我們對另一種相關研究較少之四流體(four fluids)宇宙射線-電漿系統感興趣。這系統除了熱電漿和宇宙射線的系統外，再加上兩個自我激發(self-excited)的艾爾文波，形成一個自洽(self-consistent)的系統。線性分析發現此種系統是不穩定的；同時，不穩定是產生在其中一個慢磁-聲波(slow magneto-acoustic)(Ko and Jeng 1994)。我們對這種不穩定的非線性演化之最終狀態感興趣外，其亦可作為星際介質中紊流產生的模型。

在第 2 節簡單的描述系統模型；於第 3 節說明我們模擬的數值方法；最後，於第 4 節呈現一些結果及討論。

2. 模型

在二流體模型方面，我們採用理想化的磁流體力學方程組，包括總質量、總動量及總能量守恆方程，磁場方面則有法拉第(Farady)感應方程，安培(Ampère)定律；最後再外加宇宙射線能量方程。由於宇宙射線會激發磁波，加入正、反向的艾爾文波能量方程後，形成一個四流體-即熱電漿和宇宙射線外，再加入正、反向的艾爾文波。此時，二階費米(Fermi)效應自然就會出現在這系統中。這系統能量交換有三種：(一)、波的能量由宇宙射線透過自我激發的效應產生，(二)、波則藉由二階費米加速將能量傳送給宇宙射線，(三)、宇宙射線壓力梯度與波的壓力梯度則傳遞能量給電漿；反之亦然。利用這組自洽方程我們就可以研究由宇宙射線

所誘導的種種不穩定。詳細的方程組請參考附錄 A。

3. 模擬

我們在直角座標中，利用二維數值方法解非線性、時變可壓縮磁流力加宇宙射線及波的方程組。在數值上，對磁流力及波的方程組方面，我們使用修正的 Lax-Wendroff 方法。該法是由(Shibata 1983)所發展，且由(Matsumoto et al. 1996)及(Hayashi et al. 1996)擴展其應用範圍。對於流體力學方程組，我們將其寫成如下的型式：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} + S = 0 \quad (1)$$

其中 f 可為密度、動量密度及能量密度等； \vec{F} 為通量，剩餘的項則合併到 S 項， S 項代表來源(source)。將原先的偏微分方程化為差分方程後，就可利用修正的 Lax-Wendroff 方法分兩個步驟解出欲得的物理量隨時間的演化。以質量守恆方成為例，我們有：

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^{n+1/2} \right] \quad (3)$$

由於 Lax-Wendroff 方法在數值上是屬於顯性(explicit)方法，時間間格 Δt 並不是任意的；而是要滿足 Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)條件： $\Delta t / (\Delta t)_{CFL} \leq 1$ ，其中

$$(\Delta t)_{CFL} = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_z^2} + \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} + \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\rho}}}{\min(\Delta x, \Delta z)} \quad (4)$$

否則將導致數值上的不穩定。值得一提的

是，對法拉第方程，是先求出電場；同時，我們再計算時 Δt 是調整至最佳化的。然而，我們發現當加入宇宙射線能量方程而得的時間間格 Δt 非常小，才能滿足 CFL 條件，這意味著要計算很久才能得到我們想要的結果。因此，對宇宙射線擴散項先用 Biconjugate gradient stabilized (BICGStab)方法(Yokoyama and Shibata 2001)}。求得 S 項，再以修正的 Lax-Wendroff 方法求得宇宙射線能量密度。我們在解 MHD 方程上用修正的 Lax-Wendroff 方法，而在針對解宇宙射線擴散方程上選擇了隱性(implicit)的 BICGStab 方法。所以整體而言，我們是利用混合(hybrid)數值方法。

4. 初步的結果與討論

在二流體方面，我們以 Parker 不穩定性作一個說明。初始條件為一靜態平衡的模型，其溫度分佈為：

$$T(z) = T_0 + (T_{halo} - T_0) \frac{1}{2} \left[\tanh\left(\frac{z - z_{halo}}{w_{tr}}\right) + 1 \right] \quad (5)$$

的兩層分佈。其中星系盤的溫度 $T_0=10^4\text{K}$ ，暈的溫度 $T_{halo}=2.5 \times 10^5\text{K}$ ，盤暈交界之介面高度為 $z_{halo}=900\text{pc}$ ，而過渡區的厚度為 $w_{tr}=30\text{pc}$ 。磁場為水平，同時，密度、壓力及宇宙射線壓力滿足：

$$\frac{d}{dz} \left[P_g + P_c + \frac{B^2}{8\pi} \right] - \rho g_z = 0 \quad (6)$$

在這兩層溫度分佈的星系盤中加入宇宙射線所誘導的 Parker 不穩定之模擬顯示：當平行於磁場的宇宙射線擴散係數 $\kappa_{||}$ 遞減時，

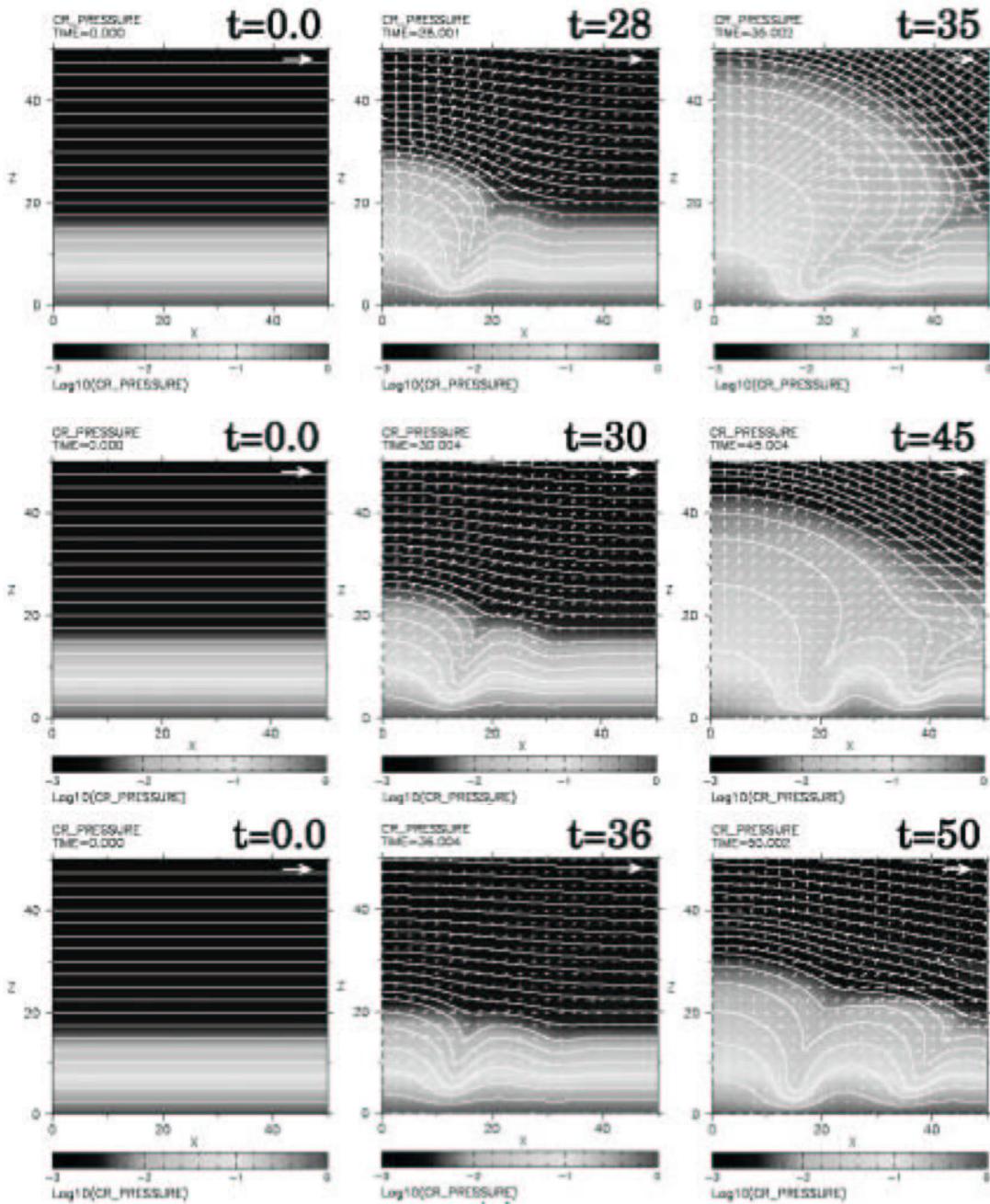
不穩定性的成長時間變得較長。圖 1 顯示不同擴散係數之宇宙射線壓力，磁力線和速度場隨時間之演化。在非線性階段，磁泡的外型因不同的擴散係數而有很大的不同。

從宇宙射線的壓力、氣體密度，以及沿磁場的速度分佈來看，在線性演化最終期，我們發現了一些特性。當擴散係數遞減時，宇宙射線的壓力分佈從原來的均勻分佈變成集中在磁泡的足點附近；同時，宇宙射線的壓力梯度迫使磁泡的頂端變得比較大。於是，向下掉落的物質被壓力梯度所阻，因此減緩了不穩定的成長。在 $\kappa_{||}=200$ 和 $\kappa_{||}=40$ 的模型中，掉落的物質的速率在聲速之下，而在磁迴路的足點附近產生震波。線性生長速率在達艾爾文速度時飽和，這符合線性分析的結果(Matsumoto et al. 1996)。在沒有微擾的情況下，星系盤高度的尺度為 $H = (C_s^2 + \beta C_s^2 + V_A^2 / 2) / g_z$ 。產生 Parker 不穩定時，電漿氣體沿磁力線落下，由於沿磁力線之宇宙射線擴散係數為均勻，不再對高度的尺度有所貢獻。結果，沿磁力線的高度的尺度變成 $H' = C_s^2 / g_z$ 。釋放的重力位能的能量密度為 $V_A^2 / 2$ 。這點和一般不考慮宇宙射線效應的 Parker 不穩定所得的結果類似。

至於四流體部分，將會以均勻背景加上速度微擾為初始條件，上邊界為自由(free)邊界、下邊界為對稱(symetry)；左、右邊界則為週期性(periodic)邊界條件，來解四流體方程組。

5. 參考文獻

- Axford, W. I., E. Leer, and J. F. McKenzie (1991), *A&A*, 111, 317.
- Breithwerdt, D., J. F. McKenzie, and H. J. Völk (1991), *A&A*, 245, 79.
- (1993), *A&A*, 269, 54.
- Drury, L.O'C., W. J. Markiewicz, and H. J. Völk (1989), *A&A*, 225, 179.
- Drury, L.O'C. and H. J. Völk (1981), *ApJ*, 284, 344.
- Hanasz, M. and H. Lesch (2000), *ApJ*, 543, 235.
- Hartquist, G. E., T. W. Morfill (1986), *ApJ*, 311, 518.
- Hayashi, M. R., K. Shibata, and R. Matsumoto (1996), *ApJ*, 468, L37.
- Ipavich, F. M. (1975), *ApJ*, 196, 107.
- Jones, T. W. and H. S. Kang (1992), *A&A*, 396, 575.
- Ko, C. M. (1991a), *A&A*, 251, 713.
- (1991b), *A&A*, 242, 85.
- (1992), *A&A*, 259, 377.
- Ko, C. M., K. W. Chan, and G. M. Webb (1997), *J. Plasma Phys.*, 57, 677.
- Ko, C. M., M. K. Dougherty, and J. F. McKenzie (1991), *A&A*, 241, 62.
- Ko, C. M. and A. T. Jeng (1994), *J. Plasma Phys.*, 52, 23.
- Ko, C. M., J. R. Jokipii, and G. M. Webb (1988), *ApJ*, 326, 761.
- Lee, M. A. and W. I. Axford (1988), *A&A*, 194, 297.
- Matsumoto, R., Y. Uchida, S. Shibata, M. R. Hayashi, A. Ferrari, G. Bodo, and C. Norman (1996), *ApJ*, 461, 115.
- McKenzie, J. F. and H. J. Völk (1991), *A&A*, 111, 317.
- Parker, E. N. (1969), *Space Sci. Rev.*, 9, 651.
- Shibata, K. (1983), *PASJ*, 35, 263.
- Webb, G. M. (1983), *A&A*, 127, 97.
- Yokoyama, T. and K. Shibata (2001), *ApJ*, 549, 1160.
- Zank, G. P. (1989), *A&A*, 225, 37.



圖一：宇宙射線的壓力，磁力線和速度場隨時間之演化。(上) $\kappa_{||}=200$ ，(中) $\kappa_{||}=40$ ，(下) $\kappa_{||}=10$ 。

附錄 A

我們用以下方程組來描述宇宙射線-磁流動力學系統(Ko 1992)。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial \check{U}}{\partial t} + \rho (\check{U} \cdot \nabla) \check{U} = -\nabla (P_{th} + P_c + P_w^+ + P_w^-) + \check{J} \times \check{B} + \rho \check{g} \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_\kappa}{\partial t} + \nabla \cdot \check{F}_\kappa = -\check{U} \cdot \nabla (P_{th} + P_c + P_w^+ + P_w^-) + \check{U} \cdot (\check{J} \times \check{B}) + \rho \check{U} \cdot \check{g} \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_{th}}{\partial t} + \nabla \cdot \check{F}_{th} = -\check{U} \cdot \nabla P_{th} + \check{J} \cdot (\check{E} + \check{U} \times \check{B}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} + \nabla \cdot \check{F}_c = [\check{U} + (e_+ - e_-) \check{V}]. \nabla P_c + \frac{P_c}{\tau} \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_w^\pm}{\partial t} + \nabla \cdot \check{F}_w^\pm = \check{U} \cdot \nabla P_w^\pm \pm e_\pm \check{V}_A \cdot \nabla P_c - \frac{P_c}{2\tau} \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + \nabla \cdot \check{F}_B = -\check{J} \cdot \check{E} \quad (13)$$

$$E_\kappa = \frac{1}{2} P_\kappa = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (14)$$

$$E_{th} = \frac{P_{th}}{\gamma_g - 1} \quad (15)$$

$$E_c = \frac{P_c}{\gamma_c - 1} \quad (16)$$

$$E_w^\pm = 2P_w^\pm \quad (17)$$

$$E_B = P_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (18)$$

$$\check{F}_\kappa = E_\kappa \check{U} \quad (19)$$

$$\check{F}_{th} = (E_{th} + P_{th}) \check{U} \quad (20)$$

$$\check{F}_c = (E_c + P_c) [\check{U} + (e'_+ - e'_-) \check{V}_A] - \kappa \cdot \nabla E_c \quad (21)$$

$$\check{F}_w^\pm = E_w^\pm(\check{U} \pm \check{V}_A) + P_w^\pm \check{U} \quad (22)$$

$$\check{F}_B^J = \frac{\check{E} \times \check{B}}{\mu_0} \quad (23)$$

$$\check{E}^J = \frac{\check{J}}{\rho} - \check{U} \times \check{B} \quad (24)$$

$$\check{J}^J = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \check{B} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \check{B}}{\partial t} = -\nabla \times \check{E} \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \check{B} = 0 \quad (27)$$

$$\check{V}_A^J = \frac{\check{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (28)$$

其中 E_{th} 、 E_κ 、 E_c 、 E_B 及 E_w^\pm 分別為電漿氣體之熱能、動能、宇宙射線能量、磁能及向前/後行進的波的能量。 \check{F}_{th} 、 \check{F}_κ 、 \check{F}_c 、 \check{F}_B 及 \check{F}_w^\pm 則為上述能量之通量。 P_g 、 P_c 和 P_w^\pm 分別為氣體壓力、宇宙射線壓力和向前/後行進的波的壓力； γ_g 及 γ_c 為氣體和宇宙射線的多方指數 (polytropic index)。 ρ 為密度， \check{U} 為速度， \check{g} 為重力加速度， \check{E} 和 \check{B} 為背景電、磁場； \check{J} 為電流密度。 κ 為宇宙射線擴散係數； μ_0 為真空中的磁導係數， σ 為電導。 \check{V}_A 為艾爾文波波速。

方程組中的參數 κ 、 τ 、 e_\pm 及 e'_\pm 會隨物理模型不同而異，以下是一個簡單的模型：

$$\kappa = \frac{ac^2}{3\alpha(P_w^+ + P_w^-)} \quad (29)$$

$$\frac{1}{\tau} = 16b\alpha \frac{V_A^2}{c^2} \frac{P_w^+ P_w^-}{P_w^+ + P_w^-} \quad (30)$$

$$e_\pm = e'_\pm = \frac{P_w^\pm}{P_w^+ + P_w^-} \quad (31)$$

其中 c 為光速， α 代表宇宙射線和波耦合的程度； e_\pm 等為向前/後波佔全部波的比例。參數 a, b 滿足： $a \leq 1$ ， $b \geq 1$ 。