

以二微米巡天觀測近紅外資料研究本銀河系結構

彭定弘、高仲明

國立中央大學天文研究所

摘要

「數星」是研究本銀河系結構的基本方法之一。因為消光在近紅外波段是可見光的十分之一，二微米巡天觀測（2MASS）提供我們對本銀河系比較理想的視野。我們拿二微米巡天觀測的點源目錄（Point Source Catalog），以一度的解析，對全天利用「微分星球計數」（Differential Star Count）進行資料分析。除了銀心附近的天區以外，在視星等9~15等間的星數—視星等的關係是個幕次關係，且全天的幕次指數沒有太大的差異（ ~ 0.3 ）。 J 、 H 、 K_s 三個波段全天平均的幕次指數分別為 0.310 ± 0.028 、 0.311 ± 0.024 、 0.327 ± 0.026 。

我們利用資料去擬合簡單雙指數衰減銀盤密度分布和單一幕次指數的光度函數。在擬合過程中，我們忽略了消光。針對光度函數的參數，我們只考慮從主序O3型態到M4型態的星。在銀盤方位 J 、 H 、 K_s 波段光度函數的幕次指數分別是1.83、1.8、1.79。我們採取「最小平方差法」定出密度分布參數。標尺高、標尺長、太陽附近場星的數目密度、太陽位於銀盤上的高度分別大約是 $400 pc$ 、 $2.35 kpc$ 、 $0.06 pc^{-3}$ 、 $28 pc$ 。

A Study on the Galactic Structure by 2MASS

Ting-Hung Peng, Chung-Ming Ko

Institute of Astronomy, National Central University

Abstract

Star count is one of the basic methods to study the structure of our Galaxy. The Two Micron All Sky Survey (2MASS) offers a better view of the global distribution of stars in our Galaxy than optical survey, because the extinction of near infrared is only 10% of that in the visible. We analyze the data of 2MASS Point Source Catalog for the whole sky at one degree resolution by differential star count. Except in the vicinity of the Galactic Center, the star count-apparent magnitude relation is well approximated by a single power law in the magnitude between 9 to 15, and the power law indices are roughly the same (~ 0.3) in the whole sky. The average power law indices of the whole sky in J , H , K_s bands are 0.310 ± 0.028 , 0.311 ± 0.024 , 0.327 ± 0.026 , respectively.

We fit the data by a simple double exponential disk for the Galaxy density distribution with a single power law luminosity function (LF). We neglect extinction in the

fitting process. We consider main sequence stars from O3 type to M4 type only. The power law indices of LF in the galactic plane in the J , H , K_S bands are 1.83, 1.8, 1.79, respectively. We adopt the least square method to find the parameters of number density profile of the Galaxy. The scale height, scale length, number density near the Sun and the position of the Sun above the mid-plane are about $400pc$, $2.35 kpc$, $0.06 pc^{-3}$, $28 pc$ respectively.

關鍵字 (Keywords): 光度函數 (Luminosity Function)、二微米巡天觀測 (2MASS)、
星球計數 (Star Counts)、銀河結構 (Galactic Structure)

Received : 2007.10.30; accepted: 2007.11.29

1、緒論

「數星」(Star count) 是研究本銀河系 (Milky Way Galaxy) 結構的一個古老方法, 由於觀測技術、資料校準技術、理論發展的進步, 「數星」方法也隨著時代的演進而展現不一樣的風貌。一開始的數星研究如 Seares (1924), Oort (1938), Bok (1937) 等人試圖從觀測資料反推星球統計方程式 (Equation of Stellar Statistics) 去解出銀河數目密度分布 (Galactic Number Density Profile)、光度函數 (Luminosity Function)、星際消光 (interstellar extinction), 但那時候還不知道消光在可見光波段有很明顯的影響 (平均 $1kpc$ 消光一個星等) 且各方向都不勻稱, 加上資料校準的極限, 使得他們的研究不是很成功, 但確認可以利用這個方法去研究本銀河系的幾何結構。

後來透過觀測其他星系的表面光度 (Surface Photometry) 了解一般星系的組成單元以及其空間分布。de Vaucouleurs & Pence (1978) 提到星系的光度結構 (Photometric Structure) 可以分為兩個主要的組成單元:

1. 橢球 (Spheroid): 滿足橢圓星系 $r^{1/4}$ 定律, 星球成員年齡較大, 多為星族

二 (Population II) 的星。

2. 銀盤 (Disk): 滿足螺旋星系 (Spiral Galaxy) 的指數定律, 星球成員年齡輕, 為星族一 (Population I) 的星。

Bahcall & Soneira (1980) 提出了利用模型去算出理論值跟觀測的資料做比較, 而不是用之前的「反推」方法去定下參數, 因低銀緯消光嚴重, 他們觀測了中高銀緯十七個天區, 模型用橢球跟銀盤這兩個主要組成單元, 發現擬合得很好, 得到銀盤的標尺長 (scale length) 為 $3.5kpc$, 標尺高 (scale height) 為 $325pc$ 。Gilmore & Reid (1983) 在紅外光 I 波段觀測了南銀極 (the South Galactic Pole), 在 18.24 平方度的天區裡, 利用金屬豐度梯度 (Metallicity Gradient) 和光譜型態 (Spectral Type) 為 K 型態和 M 型態星的空間分布推斷出本銀河系除了橢球跟銀盤外, 存在另一個組成單元, 其數目密度分布也是呈指數定律, 只是標尺高為 $1350pc$, 相對於 Bahcall & Soneira 找出的盤標尺高 $325pc$ 要來得大, 所以後來就把 Bahcall & Soneira 找出的盤稱為「薄盤」(Thin Disk), Gilmore & Reid 找出的盤為「厚盤」(Thick Disk)。

紅外波段的「數星」(Infrared Star Counts) 研究基本上也是根據可見光已知的密度參數下去進行擬合, 紅外波段的優勢在於消光相對於可見光小很多, 可以用來找低銀緯 (銀緯 $\leq 20^\circ$) 的結構, 如 Wainscoat et al. (1992) 的研究中多考慮了低銀緯的銀河結構: 銀河旋臂 (the Spiral Arms)、銀心橢球 (the Bulge)、分子環 (the Molecular Ring)。此外紅外波段數星研究中發現銀盤的標尺長來得比可見光小, 如 Ruphy et al. (1996) 分析 DENIS (Deep Near-Infrared Survey of the Southern Sky) 得到標尺長 $2.3 \pm 0.1 kpc$, Ojha (2001) 則是分析二微米巡天觀測 (Two Micron All-Sky Survey, 2MASS)^a 在反銀心 (Anti-Galactic Center) 方向的資料得到標尺長 $2.8 \pm 0.3 kpc$ 。Lopez-Corredoira et al. (2002) 分析了 2MASS 靠近銀盤總共 820 個方位 (銀經範圍是 $l=45^\circ \sim 315^\circ$, 銀緯範圍是 $b=0, \pm 3, \pm 6, \pm 9$) 的資料找出銀盤有呈喇叭狀展開的結構 (flare), 且發現資料在 $45^\circ < l < 180^\circ$ 和 $180^\circ < l < 315^\circ$ 不對稱的現象找出扭曲的結構 (warp)。

「數星」研究中另一個重要的組成是光度函數, 其描述著各種型態的星所佔的比例。可見光的光度函數是由觀測太陽附近 $300 pc$ 的距離內場星, 量出視星等跟距離後把視星等轉換成絕對星等, 然後統計而成 (McCuskey 1966)。紅外波段光度函數多半都是利用色指數轉換 (color transformation) 把可見光光度函數轉換成紅外波段 (Mamon & Soneira, 1982, Eaton et al. 1984)。不管是可見光還是紅外波段的「數星」研究中, 光度函數都採用起碼兩個斜率的形式, 且大部分都假設盤跟橢球為同樣的光度函數, 唯一差別是歸一化常數 (normalization

constant), 也就是太陽附近場星數目密度, 薄盤跟橢球的數目密度比例大約是 500:1 (Bachall 1986)。

2、資料選取及處理

二微米巡天觀測是由麻州大學 (University of Massachusetts)、紅外資料分析處理中心 (Infrared Processing and Analysis Center, IPAC) (隸屬於加州理工學院的噴射推進實驗室, JPL/Caltech) 共同進行的計畫。觀測儀器是兩座口徑 1.3 米的望遠鏡, 分別位於美國阿拉斯加的霍普金斯山 (Mt. Hopkins, AZ) 和智利聖地牙哥的 Cerro Tololo 美洲天文台 (Cerro Tololo Inter-American Observatory, CTIO, Chile), 在近紅外 $J (1.25 \mu m)$ 、 $H (1.65 \mu m)$ 、 $K_S (2.17 \mu m)$ 做巡天觀測, 觀測時間是從 1997~2001 年。2MASS 的點源目錄 (Point Source Catalog) 包含了三億多的點源, 展源目錄 (Extended Source Catalog) 包含了一百多萬個展源。對點源來說, 訊噪比 SNR (signal-to-noise ratio) = 10 時三個波段的極限星等分別是 15.8 (J)、15.1 (H)、14.3 (K_S)。

因為大部分在 Point Source Catalog (PSC) 的點源都是屬於本星系的星, 而且星際消光在紅外波段是在可見光波段的十分之一, 最重要的是 2MASS 是巡天觀測, 有全天的資料, 所以 2MASS PSC 是研究本星系整體結構的好工具。為了要有均勻的樣本, 我們用 Hierarchical Triangular Mesh (HTM)^b 的方法。我們選取點源的條件是在 2MASS 裡訊噪比 ≥ 5 , 且同時都被三個波段觀測到的點源。我們的研究是在天球的某個立體角裡面去看視星等一星數的關係。

^a <http://www.ipac.caltech.edu/2mass/>

^b <http://www.skyserver.org/HTM/>

我們發現在某些視星等範圍裡，星數分布可以用幕次形式去表示：

$$\delta m \frac{dN}{dm} \propto 10^{sm}$$

$\delta m \frac{dN}{dm}$ 是指在某個視星等 m 到 $m+\delta m$ 範圍裡有多少顆星， s 是幕次指數，為了方便起見，在本論文中我們將 s 稱為斜率， m 是視星等，這個方法在天文裡叫做微分星球計數 (Differential Star Counts)。在 J 、 H 波段中，我們發現中高銀緯的天區在視星等 10~15 的範圍裡， K_s 波段則是 9~14，似乎只有單一的斜率；低銀緯的天區會有兩段不同的斜率。

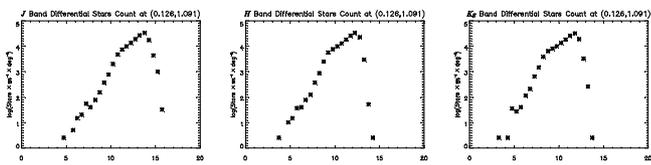


圖 1：低銀緯 ($l=0.126, b=1.091$) 天區在 0.5° 立體角裡的視星等—星數分布圖。(l ：銀經， b ：銀緯)，橫軸是視星等，縱軸是在此立體角裡有多少顆星屬於該視星等範圍之內。

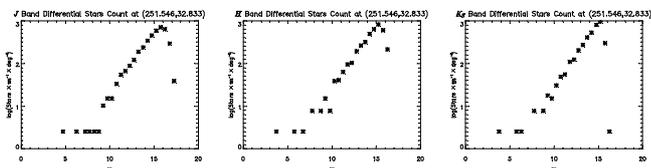


圖 2：中銀緯 ($l=251.546, b=32.833$) 天區在 0.5° 立體角裡的視星等—星數分布圖。

為了讓我們先了解一些基本的情況，我們挑了三個環去研究：

- 第一個環：銀河盤面： $l=0 \sim 359, b=0$ ， l, b 分別是銀經銀緯。
- 第二個環：從銀心方向通過銀河兩極 (Galactic Pole) 到反銀心方向： $l=0, b=-90 \sim 90$ 及 $l=180, b=-90 \sim 90$ 。
- 第三個環：從 $l=90, b=0$ 通過銀河兩極到 $l=270, b=0$ ： $l=90, b=-90 \sim 90$ 及 $l=270, b=-90 \sim 90$ 。

我們把每個環畫分成 360 等分，也就是以 0.5°

的立體角當樣本。

圖 3 是三環的斜率分布圖：黑色是 J 波段，紫色是 H 波段，紅色是 K_s 波段。圖裡的 GC 是指銀心 (Galactic Center)， AGC 是反銀心 (Anti Galactic Center)， NGP 是北銀極 (North Galactic Pole)， SGP 是南銀極 (South Galactic Pole)， $(90,0)$ 和 $(270,0)$ 是銀緯為零，銀經分別為 90 和 270 的兩塊區域。

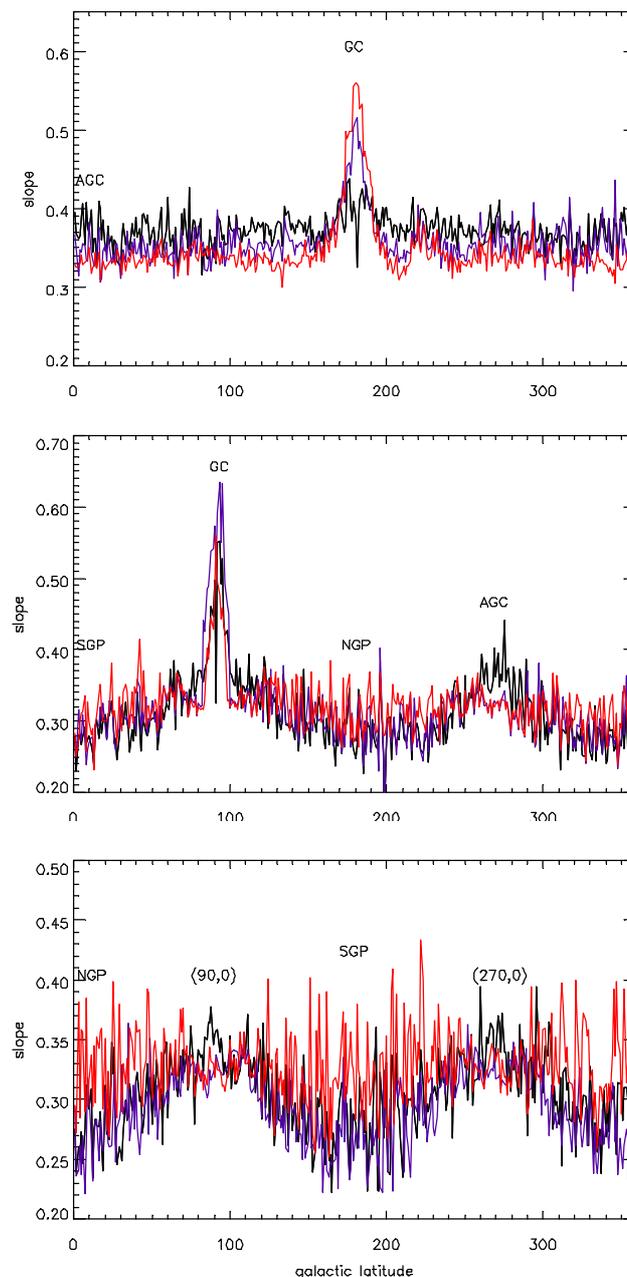


圖 3：三環的斜率分布，由上而下依序是第一、第二、第三個環，黑色線是 J 波段，紫色線是 H 波段，紅色線是 K_s 波段。

我們來看看全天的分布。延續之前 0.5° 的立體角，大約需要五萬個樣本才能佈滿全天 ($4\pi/(2\pi \times (1 - \cos\theta)) \approx 52525$, $\theta=0.5^\circ$)，我們用 HTM 取了 32768 個樣本，找出 J 、 H 、 K_s 的斜率分布 (找斜率的星等範圍 J 、 H 、 K_s 分別是 $10 \sim 15$ 、 $10 \sim 15$ 、 $9 \sim 14$) 以及全天星數分布，圖 4 至圖 7 是以 Aitoff 投影方式表達。

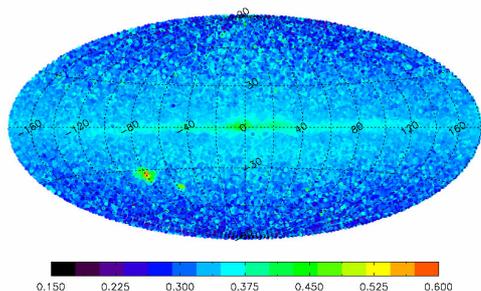


圖 4：J 波段全天斜率表示圖。

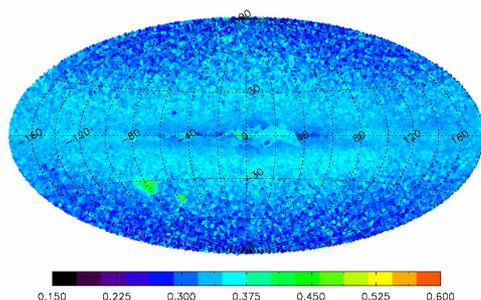


圖 5：H 波段全天斜率表示圖。

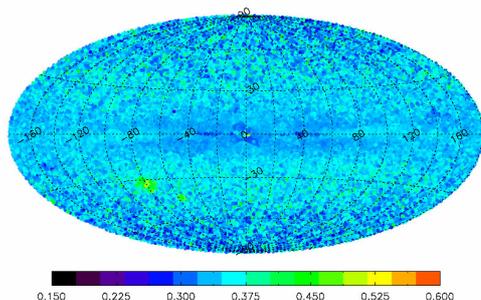


圖 6： K_s 波段全天斜率表示圖。

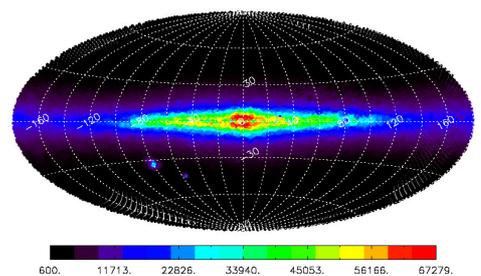


圖 7：全天星數分布圖。

我們同時也把三個波段在三個環和全天的平均斜率求出 (見表 1)。比較表 1 跟圖 4、圖 5、圖 6 發現，大部分的斜率都是 0.3 左右， J 波段斜率大的地方在銀盤特別明顯，相對而言 H 和 K_s 波段銀盤反而看不太出來。

3、數星模型

數星模型 (star count model) 包含了兩個部分，光度函數 (luminosity function) 跟數目密度分布 (number density distribution)，數星研究一直以來大多都是以已經知道的光度函數，且假設全天只有一個光度函數，然後搭配資料去找出數目密度分布；在我們的研究中，對於 2MASS 全天數星函數的斜率差不多都是 0.3 的現象使我們反過頭來研究數星模型，看看是否能解釋觀測結果。

在地球觀測某個方位 \bar{r} ，在某個立體角之內，小於某個光通量 F 的星數：

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\Omega} (< F) &= \int_0^\infty dr \int_0^{L_m} dL \psi(L, \bar{r}) n(\bar{r}) r^2 \\ &= \int_0^\infty dL \int_m^\infty dr \psi(L, \bar{r}) n(\bar{r}) r^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$\psi(L, \bar{r})$ 是光度函數， $n(\bar{r})$ 是數目密度分布。同時光通量 (flux)、光度 (luminosity)、距離三者的關係為：

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \exp\left(-\int_0^r \alpha dr\right) \quad (2)$$

這裡的 α 是消光係數。

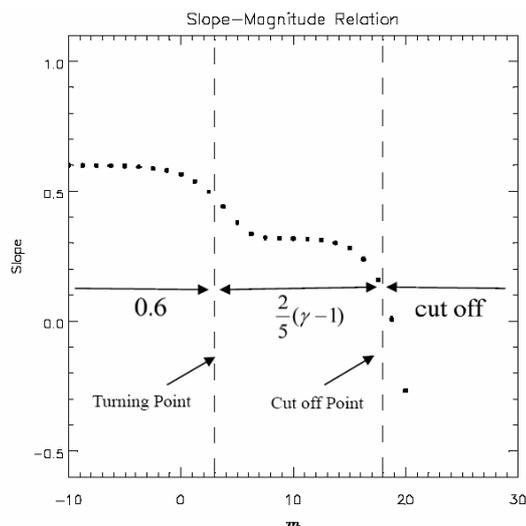
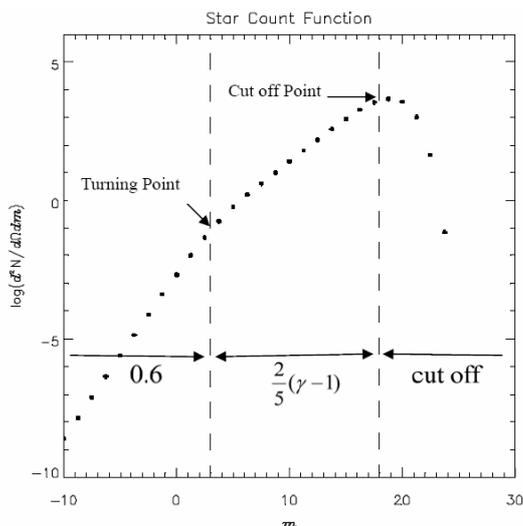
因此我們可以得到視光度函數 (apparent luminosity function)

$$\frac{d^2N}{d\Omega dF} = \int_0^\infty 4\pi \psi(L_m, \bar{r}) n(\bar{r}) r^4 \exp\left(\int_0^r \alpha dr\right) dr \quad (3)$$

利用相對星等跟光通量之間的轉換關係：

$$m - m_0 = -\frac{5}{2} \log_{10}\left(\frac{F}{F_0}\right) \quad (4)$$

這邊 m_0 和 F_0 是該波段零星等與其對應的光通量。



我們得到數星函數 (star count function)

$$\frac{d^2N}{d\Omega dm} = \left| \frac{dF}{dm} \right| \frac{d^2N}{d\Omega dF} = \left(\frac{2}{5} \log_e 10 \right) F \frac{d^2N}{d\Omega dF} \quad (5)$$

在這論文我們主要是用單一 幕次指數的光度函數

$$\psi = \left[\frac{L_1^{(1-\gamma)} - L_2^{(1-\gamma)}}{L_1^{(1-\gamma)} - L_2^{(1-\gamma)}} \right] L^{-\gamma} [H(L-L_1) - H(L-L_2)] \quad (6)$$

這邊 H 是階梯函數 (step function)，也就是說 L 在 L_1, L_2 之間才有值，其他地方都為零， L_1 是光度最小星的光度， L_2 是光度最大星的光度， γ 是光度函數的幕次指數。

假設密度分布在一段短距離內接近某個有限值，而在距離很遠的地方密度差不多為零，也就是當 $r \ll h$ ， $n(r, \theta, \phi) \approx n_e(\theta, \phi)$ ；當 $r \gg h$ ， $n(r) \approx 0$ 。這邊的 h 我們把它叫做密度分布的尺度 (length scale)。整個數星函數就會有三種情況，以斜率來分： $s=0.6$ 、 $s=0.4(\gamma-1)$ 和 $s=-\infty$ ，如圖 8。其中有兩個轉彎的地方，第一個轉彎的地方我們叫**轉折點** (turning point)，第二個轉彎的地方叫**截點** (cut off point)。同一個視星等底下，光度大的星會在遠方，而光度小的星分布在近處，對具相同絕對星等的恆星而言，視星等從小變到大時，所能觀測到星的距離就越遠；視星等小的時候，所有光度的星都分布在

圖 8：圖(左) 是利用單一 幕次指數 γ 的光度函數模擬出來的數星函數。圖(右) 則是數星函數斜率與視星等之關係。

表 1：樣本斜率平均

波段	J	H	K_S
第一個環	0.370±0.018	0.352±0.018	0.337±0.014
第二個環	0.305±0.04	0.306±0.036	0.317±0.029
第三個環	0.304±0.033	0.294±0.031	0.327±0.03
全天平均	0.310±0.028	0.311±0.024	0.327±0.026

表 2：2MASS 主序星絕對星等與相對光度表 (Bessel 1988, 1991, 2004)

光譜型態	J	L_J	H	L_H	K_S	L_K
O3	-5.32	135.14	-5.09	109.22	-5.07	106.65
B0	-3.38	22.66	-3.22	19.51	-3.21	19.23
A0	-0.001	1.00	0.044	0.96	0.01	0.98
G2	3.54	0.038	3.27	0.049	3.19	0.052
K0	4.39	0.017	4	0.025	3.89	0.027
M0	5.98	0.004	5.37	0.007	5.17	0.008
M4	8.25	0.0005	7.68	0.0008	7.39	0.0011

h 之內 (數星函數在密度差不多是個常數時，也就是 $s=0.6$ 的段落)，然而在某些視星等範圍底下，光度大的星分布超過 h 時，因密度分布告訴我們此時密度為零，也就是整個數星函數由光度小的星所貢獻 (數星函數在 $s=0.4(\gamma-1)$

的段落)。同理，如果視星等再繼續加大，最後連光度小的星都分布在 h 的外面，數星函數就變成零了（數星函數在 cut off 的段落，也就是 $s=-\infty$ ）。

我們從Bessel 1988, 1991, 2004知道2MASS與紅外波段色指數間的轉換，就可以利用色指數轉換導出2MASS的絕對星等，如表2。

我們的銀河數目密度分布假設為一個銀盤，其形式為雙指數衰減。用圓柱座標的形式去表示：

$$n_d(\varpi, z) = n_{d0} \exp\left(-\frac{\varpi - R_0}{h_r}\right) \exp\left(-\frac{|z| - z_S}{h_z}\right) \quad (8)$$

n_{d0} 是太陽附近的盤面場星數目密度， ϖ 是圓柱座標中距離銀心 z 軸的距離， R_0 是太陽到銀心的距離， z 是與盤面的垂直距離， z_S 是太陽距離盤面的高度， h_r 跟 h_z 分別是盤面的標尺長 (scale length) 跟標尺高 (scale height)。

我們的數星模型有八個參數，三個是從光度函數來的 (L_1 、 L_2 、 γ)，五個是從銀河密度分布來的 (n_{d0} 、 h_r 、 h_z 、 z_S 、 R_0)。除了假設 $R_0 = 8kpc$ (Bahcall 1986)，我們希望可以從2MASS的資料中找出其他的參數。觀測結果顯示紅外數星函數在星等9至15等間幾乎都是單

一斜率分布，且斜率都在 0.3 附近而不是 0.6 或在截點附近。因此我們的策略如下：因為紅外波段的研究中發現標尺長差不多都是 $2kpc$ 到 $3kpc$ 左右，標尺高跟可見光研究的值 $\sim 325pc$ 差不多，同時我們發現整個數星模型的形狀跟數目密度分布的參數不太敏感，所以我們先假設數目密度分布為 $h_r = 2kpc$ 、 $h_z = 325pc$ ，從形狀找出光度函數；同時三個波段中以 K_S 波段消光最小，所以我們拿 K_S 波段的星數去定出密度分布。

因為觀測資料告訴我們，第一個環 $l=90\sim 270$ 的方位，轉折點出現在視星等 8 左右。每個方向從視星等 9~14 都是單一斜率分布，所以可以利用第一個環的斜率去找出光度函數的 γ ，轉折點的位置可以估計 L_2 大小。圖 9 (左) 是用模型代入不同 L_2 產生的結果和資料做擬合，我們發現 $L_2=100$ 似乎擬合得不錯。 L_1 應從截點選定。高銀緯的方位數星模型的截點較容易在小於 15 等 ($\sim 2MASS$ 的極限星等) 出現，所以我們拿北銀極天區測試，圖 9 (右) 是改變最小光度星的光度，從 $L_1=0.01$ 、 0.001 到 0.0001 去看數星函數的分布。如果把 L_1 變小，截點會跑到視星等更大的地方，但因為

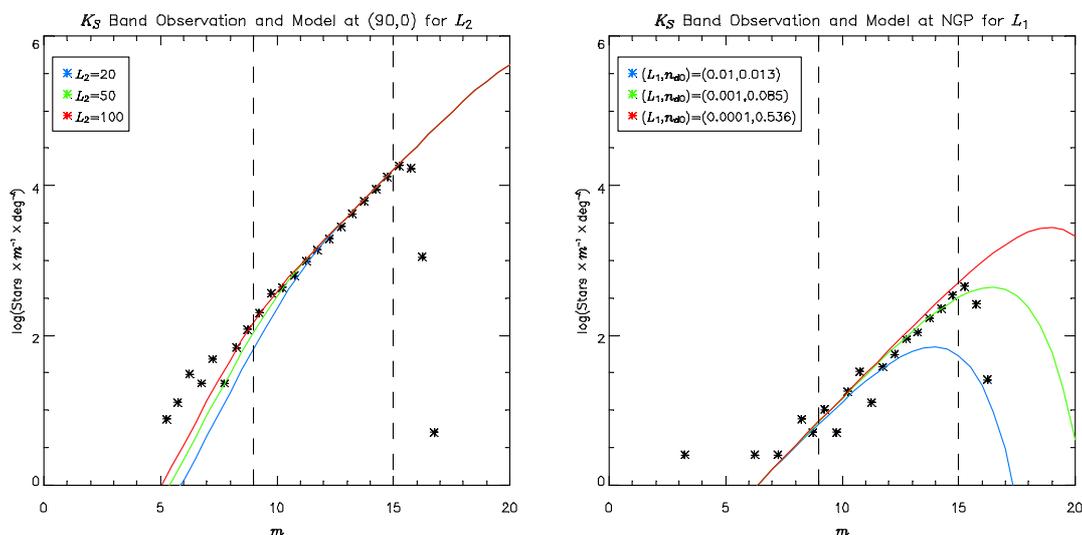


圖 9：圖 (左) 是 $l=90, b=0$ K_S 波段觀測跟不同 L_2 模擬的數星函數，黑色點是觀測，不同顏色的線則是不同 L_2 值模擬出的 ($\gamma=1.8$)，圖 (右) 是北銀極方位測試不同的 L_1 。

2MASS 有極限星等的限制，所以我們無法判斷 L_1 到底可以取多小，從圖 9 (右) 可以看出 $L_1 \approx 0.001$ 是個不錯的選擇。我們便以 O3 型做為模型中光度函數最亮的星，M4 型做為模型中光度函數最暗的星。

定出 L_1 和 L_2 之後，下一步就是要估計 γ 。觀測到的紅外數星函數在 9~15 星等間都很接近單一斜率函數，而且其斜率差不多在 0.3 左右。這使我們懷疑光度函數是單一冪次指數的函數，從圖 10 來看，銀盤方位落在 10~14 等左右的斜率滿足 0.4 ($\gamma=1$)，所以我們也跟著取

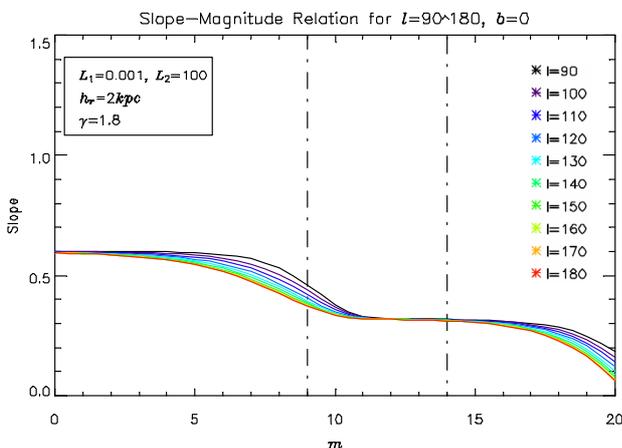


圖 10：利用光度函數參數 $L_1=0.001$ 、 $L_2=100$ 、 $\gamma=1.8$ 在第一個環的視星等—斜率分布，可知在 10~14 等左右的斜率滿足 0.4 ($\gamma=1$)。

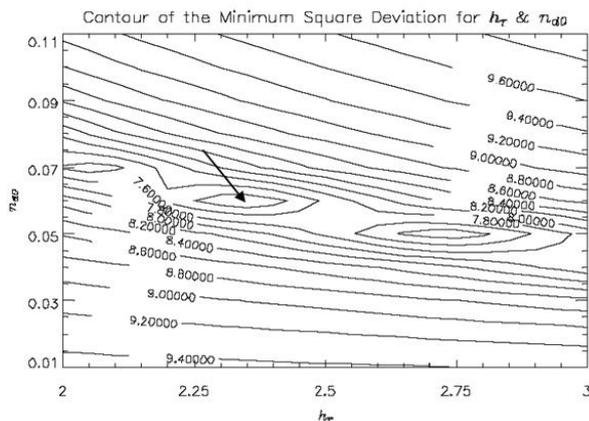


圖 11： hr n_{d0} 最小平方差等值線圖，橫軸 hr 的範圍是 2 ~ 3kpc，每 0.05kpc 為一個單位；縱軸 n_{d0} 則是 0.01 ~ 0.11 pc^{-3} ，每 0.01 pc^{-3} 為一個單位，圖中分別出現了三個極小值，其中最小值出現在 (0.06 pc^{-3} , 2.35kpc)。

料這段視星等範圍的斜率當作模型的 γ 值。我們資把各個方位的 γ 用平均的 γ 去取代。J、H、 K_S 波段的 γ 分別是 1.83、1.8、1.79。

找出光度函數的參數後，我們利用星數去確定數目密度分布的參數。在不考慮消光情況下，我們採用的方法是最小平方差法 (the least square method)，用第一個環的星數定出 n_{d0} 、 h_r ，第三個環定出 h_z 、 z_S 。

找出的數目密度分布參數如下：

$$n_{d0} = 0.06pc^{-3}, \quad h_r = 2.35kpc, \quad h_z = 403pc, \quad z_S = 28pc.$$

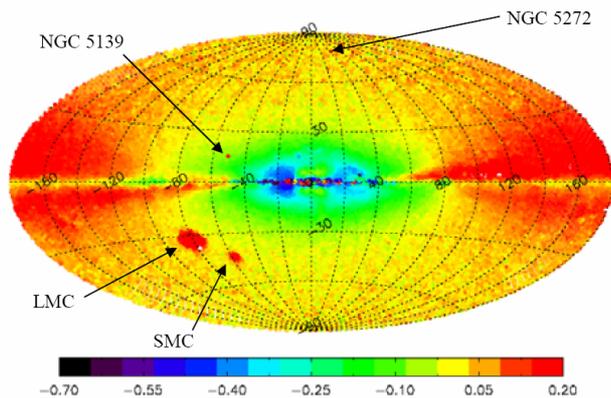
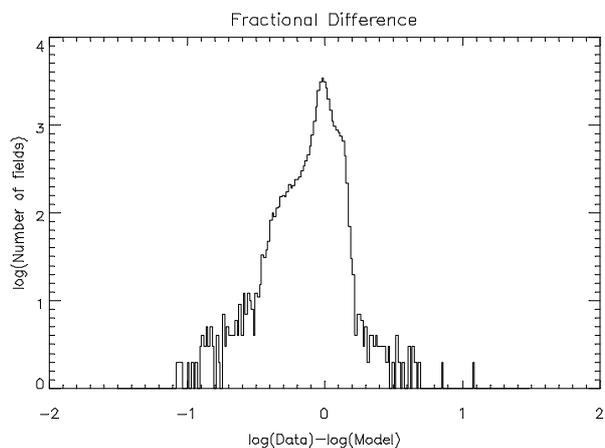


圖 12：圖 (上) 為 K_S 波段全天星數比例差異統計圖，橫軸是該星場的星數對數差，縱軸是星場統計 (取對數)，可知星數比例差異大部分都落在橫軸 -0.7~0.2 的範圍裡。圖 (下) 則是星數比例差異全天分布圖。

4、結果

有了最佳參數之後，下一步就是研究銀河的結構。我們試著把資料「扣掉」模型，來看

看剩下來的結構是什麼。採取的方法是把每個星場的資料跟模型的星數先取以十為底的對數之後相減〈也就是去看星數比〉，又根據統計分布，畫出全天的星數比例差異分布圖，如圖 12。圖 12（下）越紅的地方代表資料比模型星數來得越多。除了可以很明顯地看到大小麥哲倫雲〈在 $l=280$, $b=-30$ 附近跟 $l=300$, $b=-40$ 附近〉，球狀星團 NGC 5139 〈 $l=310$, $b=15$ 〉、球狀星團 NGC 5272 〈 $l=42.2$, $b=78.7$ 〉，還有在銀盤反銀心方向〈 $80 < l < 280$, $|b| < 30$ 〉資料會比模型的星數來得多。

另外我們的研究是以三個環定下模型的參數，其中光度函數的參數 γ 是直接利用第一個環平均得到的，且我們無法從資料得到 L_l 的大小；數目密度分布分別是用第一個環和第三個環得到的，這些參數應用在整個銀河系上會有所缺失的。

參考文獻

1. Bahcall, J. N. & Soneira, R. M. 1980, *ApJS*, 44, 73.
2. Bahcall, J. N. 1986, *ARA&A*, 24, 577.
3. Bessell, M. S. & Brett, J. M. 1988, *PASP*, 100, 1134.
4. Bessell, M. S. 1991, *AJ*, 101, 662.
5. Bessell, M. S. 2005, *ARA&A*, 43, 293.
6. Bok, B. J. 1937, *The Distribution of Star in Spac*, Chicago Univ. Chicago Press.
7. de Vaucouleurs, G. & Pence, W. D. 1978, *AJ*, 83, 1163.
8. Eaton, N., Adams, D. J. & Giles, A. B. 1984, *MNRAS*, 208, 241
9. Freeman, K. C. 1970, *ApJ*, 161, 802.
10. Gilmore, G. & Reid, N. 1983, *MNRAS*, 202, 1025.
11. Lopez-Corredoira, M. et al. 2002, *A&A*, 394, 883.
12. Mamon, G. A. & Soneira, R. M. 1982, *ApJ*, 255, 181.
13. McCuskey, S. W. 1966, *VA*, 7, 141.
14. Ojha, D. K. 2001, *MNRAS*, 322, 426.
15. Oort, J. H. 1938, *Bull. Astron. Inst. Neth.* 8: 233.
16. Ruphy et al. 1996, *A&AL*, 313, 21.
17. Seares, F. H. 1924, *ApJ*, 59, 11.
18. Wainscoat, R. J. et al. 1992, *ApJS*, 83, 111.

